

第7章

多

元函数的微分学及其应用

- 多元函数的概念
- 偏导数与全微分
- 多元复合函数求导法
- 隐函数求导法
- 多元函数微分学的几何应用
- 方向导数与梯度
- 多元函数的极值及其求法



7.1 多元函数的概念

7.1.1 平面点集的有关概念

7.1.2 多元函数的概念

7.1.3 多元函数的极限

7.1.4 多元函数的连续性

7.1 多元函数的概念

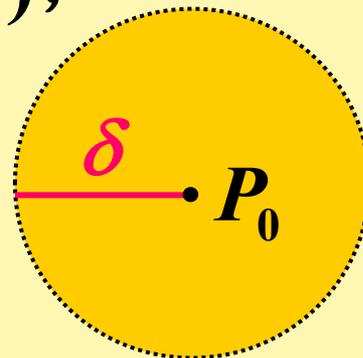
7.1.1 平面点集的有关概念

1. 邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面上的一个点, δ 是某一正数, 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体, 称为点 P_0 的 δ 邻域, 记为 $U(P_0, \delta)$,

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$

$$= \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \right\}$$



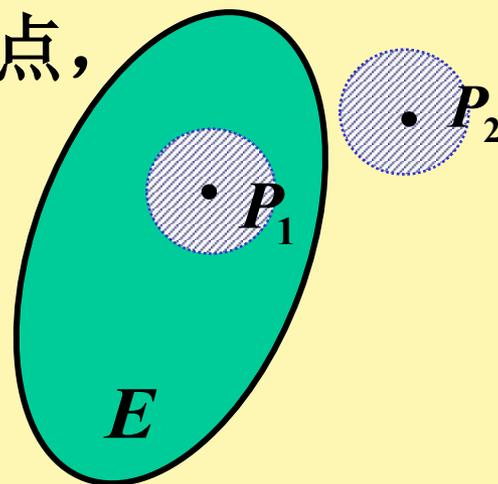
2 区域

(1) 内点 设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P) \subset E$, 则称 P 为 E 的内点. E 的内点属于 E .

(2) 外点 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$, 使得 $U(P) \cap E = \emptyset$, 则称 P 为 E 的外点.

(3) 开集 如果点集 E 的点都是内点, 则称 E 为开集.

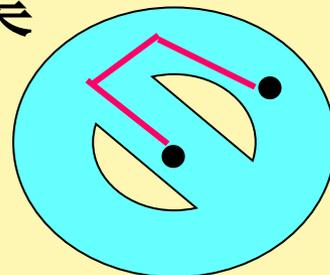
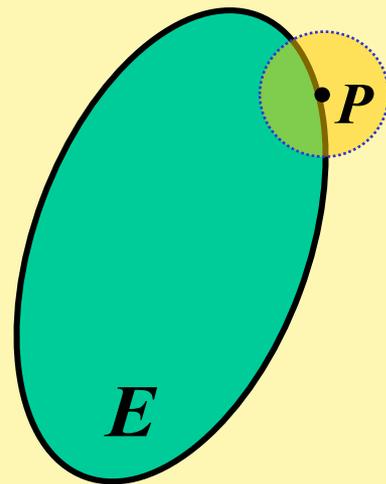
例如, $E_1 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
即为开集.



(4) 边界点 如果点 P 的任一个邻域内既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点 (点 P 本身可以属于 E , 也可以不属于 E), 则称 P 为 E 的边界点. E 的边界点的全体称为 E 的边界.

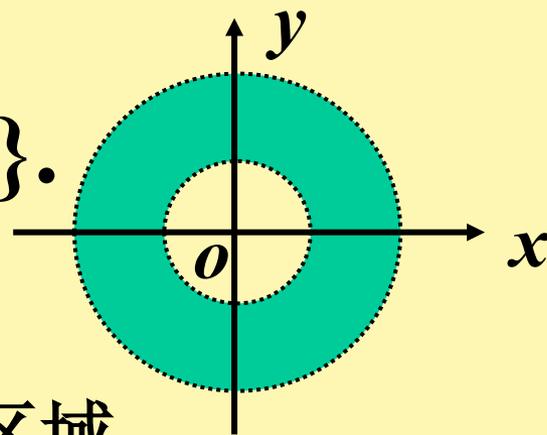
$\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ 的边界点是?

(5) 连通集 设 D 是开集. 如果对于 D 内任何两点, 都可用折线连结起来, 且该折线上的点都属于 D , 则称开集 D 是连通的.



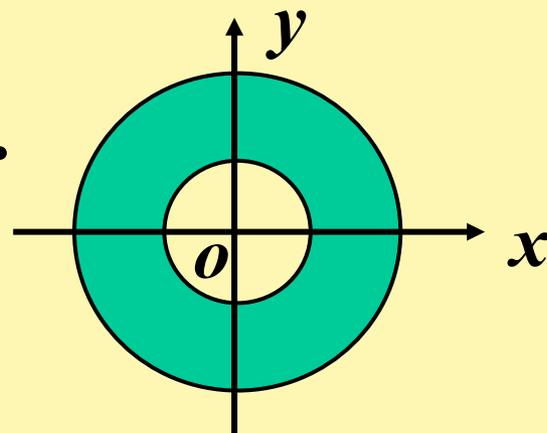
(6) 区域 连通的开集称为开区域.

例如 $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.



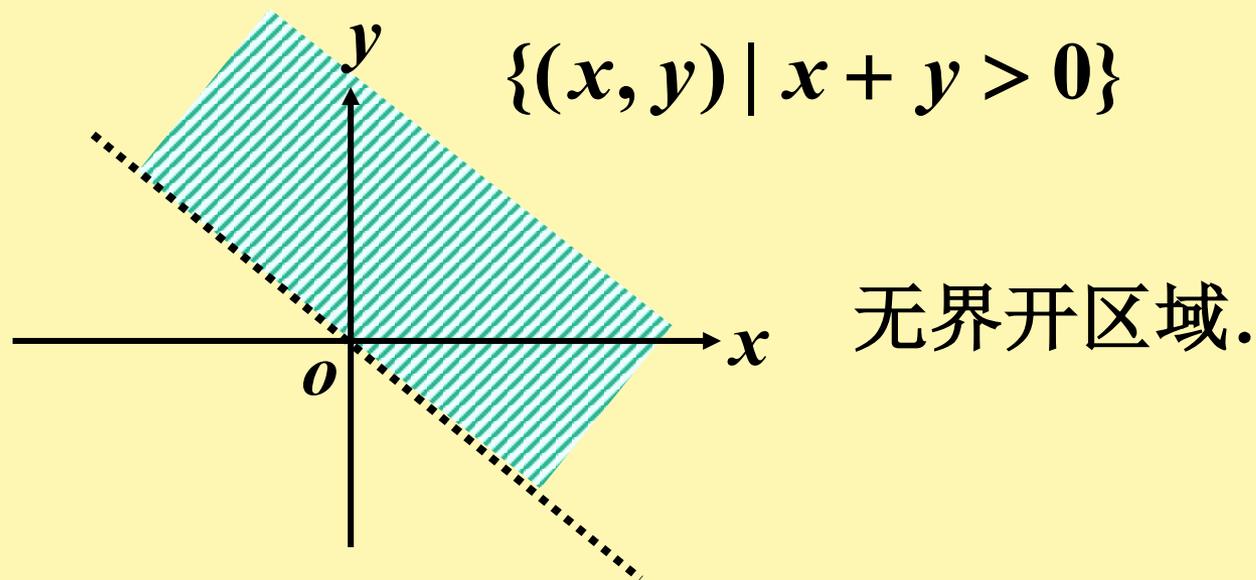
开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如, $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.



3 有界集 对于点集 E 如果存在正数 r , 使 $E \subset U(O, r)$ 则称 E 为有界点集, 否则称为无界点集.

例如, $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 有界闭区域;



4 聚点

设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 如果点 P 的任何一个去心邻域内总有点属于点集 E , 则称 P 为 E 的聚点.

注: (1) 内点一定是聚点;

(2) 边界点可能是聚点;

例如 $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(2, 0)\}$

单位圆上的点是边界点也是聚点.

$(2, 0)$ 是边界点, 但不是聚点

(3) 点集 E 的聚点可以属于 E , 也可以不属于 E .

5 n 维空间

设 n 为取定的一个自然数，我们称 n 元数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的全体为 n 维空间，而每个 n 元数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 称为 n 维空间中的一个点，数 x_i 称为该点的第 i 个坐标。

注： (1) n 维空间的记号为 R^n ；

(2) n 维空间中两点间距离公式

设两点为 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

设两点为 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

当 $n=1, 2, 3$ 时, 为数轴、平面、空间两点间的距离.

(3) n 维空间中邻域、区域等概念

邻域: $U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P \in R^n\}$

内点、边界点、区域、聚点等概念也可类似定义.

7.1.2 多元函数的概念

1 二元函数的定义

定义 7.1.1 设 D 是平面上的一个点集, 则称映射 $f:D \rightarrow R$ 为定义在 D 上的二元函数,

记为 $z = f(x, y), (x, y) \in D$, 或 $z = f(P), P \in D$

如: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

类似地可定义三元及三元以上函数.

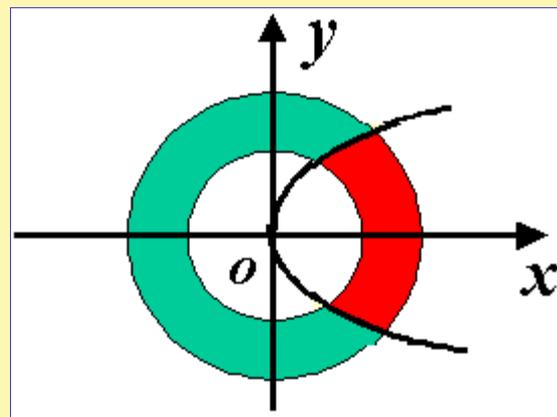
当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为多元函数.

多元函数中同样有定义域、值域、自变量、因变量等概念.

例1 求 $f(x, y) = \frac{\arcsin(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$ 的定义域

解
$$\begin{cases} |3 - x^2 - y^2| \leq 1 \\ x - y^2 > 0 \end{cases}$$

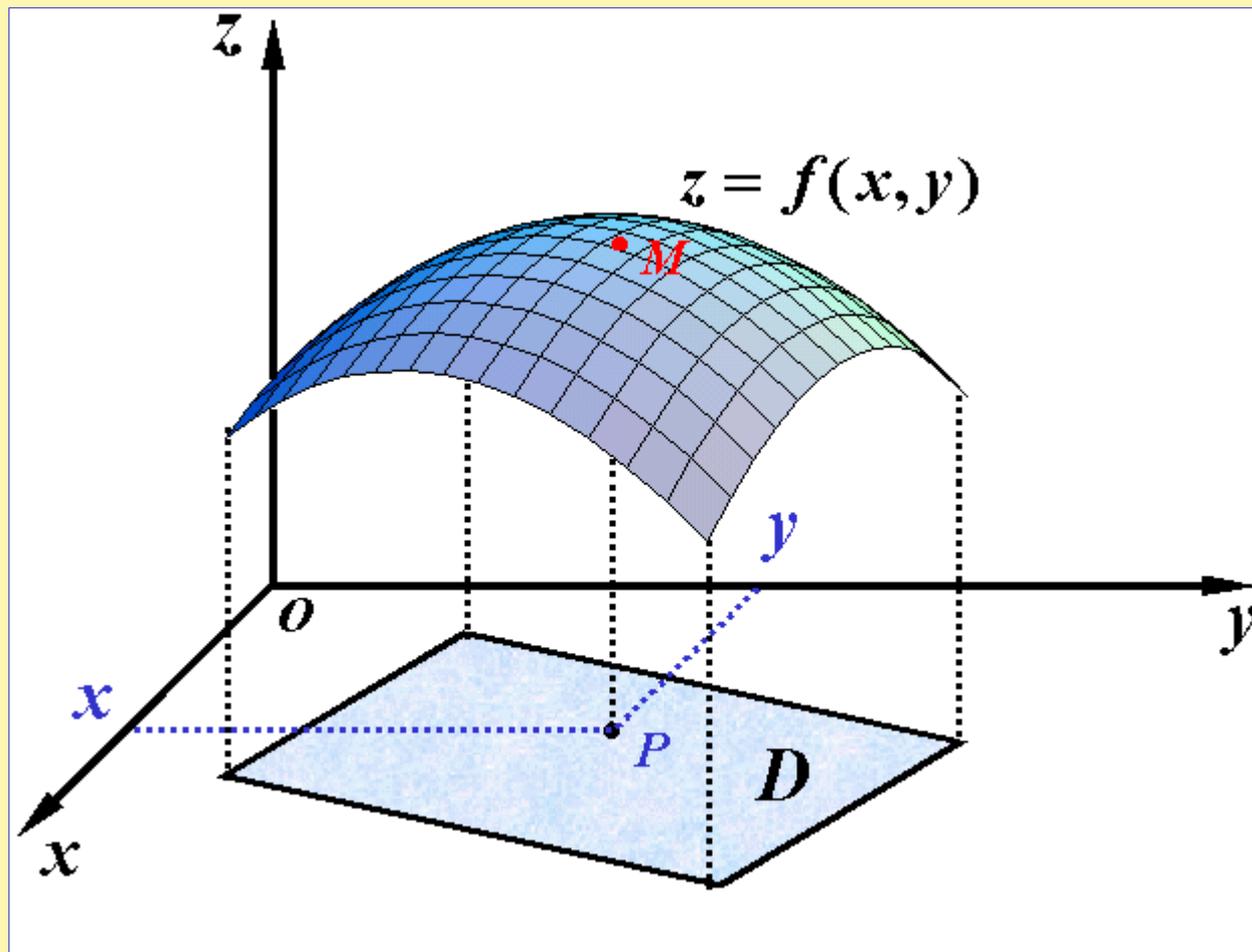
$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ x > y^2 \end{cases}$$



所求定义域为

$$D = \{(x, y) \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > y^2\}.$$

2 二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形

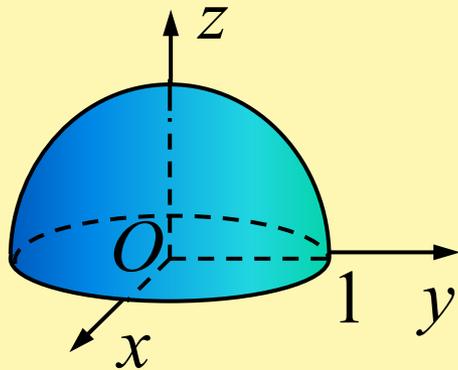


二元函数的图形通常是一张曲面.

例如, 二元函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

定义域为圆域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.



7.1.3 多元函数的极限

定义7.1.2 设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是其聚点, 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得对于适合不等式 $0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 的一切点, 都有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 A 为函数 $z = f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的极限,

记为 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

(或 $f(x, y) \rightarrow A$ ($\rho \rightarrow 0$) 这里 $\rho = |PP_0|$) .

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

当 $0 < |PP_0| < \delta$ 时, 有 $|f(P) - A| < \varepsilon$ 成立.

注: (1) 定义中 $P \rightarrow P_0$ 的方式是任意的;

(2) 二元函数的极限也叫二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$;

与累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 及 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 不同.

(3) 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

(4) 二元以上函数的极限可类似地定义.

2. 二元函数极限问题举例

例2 用定义证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$

证明:
$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right|$$
$$= |x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon},$$

当 $0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$ 时,

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{原结论成立.}$$

例3 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{0}{0}\right)$

解 $\because x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \sin x^2 y \sim x^2 y$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{又 } 0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

$$\text{由夹逼准则 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = 0.$$



$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

另解：可以利用极坐标

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \rho \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 \theta \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

(根据有界量乘无穷小量仍为无穷小量)

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = 0.$$



例4 证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在

分析：若 P 沿着某条路径趋于 P_0 时极限不存在，或 P 沿着不同的路径趋于 P_0 时有不同的极限，则二重极限不存在。

证明：令 P 沿直线 $y=kx$ 而趋于点 $P_0(0,0)$ ，则有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

显然，此极限值随 k 的变化而变化，所以二重极限

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在

例4*. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 是否存在?

解: 当 P 沿直线 $y=kx$ 而趋于 $(0, 0)$ 点时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0$$

当 P 沿曲线 $y=kx^2$ 而趋于 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx^2 \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

它是与 k 的取值有关的, 所以二重极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ 不存在}$$

确定极限不存在的方法:

(1) P 沿着某条路径趋于 P_0 时极限不存在

(2) 找两种不同趋近方式, 使 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在,

但两者不相等, 此时也可断言 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处极限不存在.

如 $P(x, y)$ 沿 $y = kx$ 趋于 $P_0(x_0, y_0)$, 极限值与 k 有关

(3) 特殊趋向: $y = x, y = x^2, x = y^2, y = x^3$ 等.

7.1.4 多元函数的连续性

1 多元函数连续性的定义

定义7.1.3 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为点集 D , P_0 是其聚点且 $P_0 \in D$, 如果 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 处连续.

设 P_0 是函数 $f(P)$ 的定义域的聚点, 如果 $f(P)$ 在点 P_0 处不连续, 则称 P_0 是函数 $f(P)$ 的间断点.

注: (1) 间断点的判别与一元函数类似.

(2) 多元函数不仅有间断点而且有间断线.

如: $z = \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

例5 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

在(0,0)处的连续性.

解 取 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

有界量·无穷小量

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) = 0$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0)$, 故函数在(0,0)处连续.

注意：经过坐标变换后，趋向于原点的方式

仍然是任意的！

例6 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在(0,0)的连续性.

解 取 $y = kx$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

其值随 k 的不同而变化, 极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

2 闭区域上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理

在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次。

(2) 介值定理

在有界闭区域 D 上的多元连续函数能在 D 上取得介于最大值和最小值之间的一切值。

3 多元初等函数的连续性

多元初等函数：由常数及不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫多元初等函数

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的。

定义区域是指包含在定义域内的开区域或闭区域。

一般地，求 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的内点，则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，于是 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ 。

例7 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 原式 = $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ 在以原点为中心的某个圆域连续

解法二：令 $u = xy$

原式 = $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{u+1}-1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}u}{u} = \frac{1}{2}$

小结

本节主要讨论了多元函数的概念、多元函数极限及连续的概念。

本节要求了解多元函数极限及连续的概念，知道多元初等函数的连续性及有界闭区域上连续函数的性质，会求一些二元函数的极限。